

Rolf Kottsieper

ÜBER DIE KOINZIDENZEN ZWEIER ABBILDUNGEN
EINES POLYEDERS IN EINE MANNIGFALTIGKEIT

1963

Frankfurt am Main 1962

ÜBER DIE KOINZIDENZEN ZWEIER
ABBILDUNGEN EINES POLYEDERS IN
EINE MANNIGFALTIGKEIT

Inauguraldissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaft-
lichen Fakultät der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

vorgelegt
von
Rolf Kottsieper
aus
Mainz

September 1962

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Frankfurt am Main

Dekan: Prof. Dr. Theodor Wieland

1. Gutachter: Prof. Dr. Wolfgang Franz

2. Gutachter: Dozent Dr. Friedrich Wilhelm Bauer

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Februar 1963

Tag der Promotion: 27. Februar 1963



Inhaltsverzeichnis

	Seite
§ 0 Einleitung	1
§ 1 Über die Koinzidenzbildmenge	4
§ 2 Die Methode der Graphenschnitte	16
§ 3 Spezielle Abbildungen und Polyeder	24
Literaturverzeichnis	32

§ 0. Einleitung

Die Frage nach den Invarianten der Homotopieklasse eines Paares (f, g) stetiger Abbildungen des Polyeders $\mathcal{K}$ in das Polyeder $\mathcal{K}'$ führt unter anderm auf die Untersuchung der Koinzidenzpunkte von f und g , das sind die Punkte P aus $\mathcal{K}$ mit $f(P) = g(P)$.

Sind $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ speziell n -dimensionale, geschlossene, orientierbare und orientierte Mannigfaltigkeiten in dem Sinn, daß jeder Punkt von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ eine der n -dimensionalen Vollkugel homöomorphe Umgebung besitzt, so ist folgendes bekannt (siehe (5), (6)): Durch eine beliebig kleine homotope Änderung von f und g läßt sich erreichen, daß die Koinzidenzpunkte isoliert liegen, jedem von ihnen kann ein Index zugeordnet werden mit der Eigenschaft, daß die Summe dieser Indexe, die sogenannte algebraische Koinzidenzpunktzahl $j_0(f, g)$, eine Invariante der Klasse (f, g) ist.

Ein erster Schritt zu einer Verallgemeinerung auf Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension stammt von Schirmer (6): Ist die Dimension m von $\mathcal{K}$ kleiner als die Dimension n von $\mathcal{K}'$, so sind die Abbildungen $f, g: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ trennbar, d.h. durch homotope Änderung lassen sie sich stets koinzidenzpunktfrei machen. Ist dagegen $m \geq n$, so gibt es zu f und g homotope Abbildungen f' und g' , deren Koinzidenzen auf einer höchstens $d = m - n$ dimensional abgeschlossenen Punktmenge von $\mathcal{K}$ liegen. Dieser Punktmenge ordnet Franz in (4) eine d -dimensionale invariante Koinzidenzhomologieklasse $j_d(f, g)$ in $\mathcal{K}$ zu. Dazu betrachtet er die d -dimensionale Schnittklasse $J_d(f, g)$ der Graphen der Abbildungen f und g in der Produktmannigfaltigkeit $\mathcal{K} \times \mathcal{K}'$. J_d läßt sich als Summe von $d + 1$ Komponenten $J_d^\vee$ darstellen, $\vee = 0, \dots, d$. Die Projektion der Komponente $J_d^\vee$ nach $\mathcal{K}$ liefert dort die Koinzidenzklasse j_d . Für $d = 0$, also $m = n$, geht

sie in die algebraische Koinzidenzpunktzahl $j_0(f, g)$ über und stellt somit eine Verallgemeinerung dieser Zahl dar.

Unsere Untersuchungen in dieser Arbeit, die sich allgemeiner auf die Abbildungen f und g eines beliebigen, m -dimensionalen Polyeders $\bar{K}$ in eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit $N = K'$ beziehen, schließen eine Deutung der übrigen Komponenten $J_d^v(f, g)$ für $v \neq d$ ein. Dabei stellt sich heraus, daß die Projektionen dieser Komponenten nach $\bar{K}$ und N eng zusammenhängen mit den Koinzidenzen auf Vertretern aus den Homologieklassen von $\bar{K}$ sowie ihren Bildern. Genauer gilt folgendes: Ist $z_{n+\rho}$ ein Zyklus aus der Basisklasse $\mathcal{B}_{n+\rho}$ der $(n+\rho)$ -ten Homologiegruppe $H_{n+\rho}(\bar{K})$, $\rho = 0, \dots, d$, so bestimmen die Koinzidenzen auf dem Polyeder $|z_{n+\rho}|$ sowie ihre Bilder in einem noch genau zu definierenden Sinn ρ -dimensionale Homologieklassen in $\bar{K}$ und N , die unabhängig sind von der Auswahl des Vertreters $z_{n+\rho}$ aus $\mathcal{B}_{n+\rho}$. Die daraus resultierenden Homomorphismen

$$\varphi_*^1: H_{n+\rho}(\bar{K}) \rightarrow H_\rho(N),$$

$$\varphi_*^2: H_{n+\rho}(\bar{K}) \rightarrow H_\rho(\bar{K}), \quad \rho = 0, \dots, d$$

sind Invarianten der Homotopieklassen (f, g) .

Die Koinzidenzbilder auf dem Polyeder $|z_{n-d+\rho}|$ eines Zyklus $z_{n-d+\rho}$ der Basisklasse $\mathcal{B}_{n-d+\rho}$ der Homologiegruppe $H_{n-d+\rho}(\bar{K})$, $\rho = 0, \dots, d$, bestimmen eine ρ -dimensionale Homologieklass in N , ihre Urbilder eine ebenfalls ρ -dimensionale Klasse in $\bar{K}$. Wieder ist die Unabhängigkeit von der Auswahl des Vertreters $z_{n-d+\rho}$ gewahrt und die dadurch gegebenen Homomorphismen

$$\psi_*^1: H_{n-d+\rho}(\bar{K}) \rightarrow H_\rho(N)$$

$$\psi_*^2: H_{n-d+\rho}(\bar{K}) \rightarrow H_\rho(\bar{K})$$

sind weitere Invarianten von (f, g) .

Wir werden zunächst die Verhältnisse in der Bildmannigfaltigkeit N untersuchen und dazu die von Hopf in (3) ange-deutete Methode benutzen. Hopf ordnet jedem n -Zyklus z_n

aus dem Polyeder $\bar{K}$ eine Zahl $j_0(z_n; f, g)$ zu, die sogenannte algebraische Koinzidenzpunktzahl, die als Schnittzahl des n -Zyklus $f(z_n) \times g(z_n)$ mit der Diagonalen D in der Produktmannigfaltigkeit $\bar{K} \times \bar{K}$ definiert ist. Ersetzt man z_n durch einen homologen Zyklus, so ändert sich j_0 nicht, ist also eine Invariante der Homologieklassse j_n von z_n . Die so gegebene Funktion auf den n -ten Homologieklassen von $\bar{K}$ faßt Hopf als Kohomologieklassse auf, während wir sie als den Homomorphismus $\mathcal{Y}_*^1$ für $g = 0$ erkennen werden. Für die Zyklen z_{n+g} von $\bar{K}$, $g = 1, \dots, d$, liefern uns die Schnitte von $f(z_{n+g}) \times g(z_{n+g})$ mit der Diagonalen D ganz entsprechend die Homomorphismen $\mathcal{Y}_*^1$. Mit der gleichen Methode werden wir auch die Homomorphismen $\mathcal{Y}_*^1$ bestimmen.

Anschließend greifen wir die Methode der Graphenschnitte auf, die auch die Verhältnisse im Urbild $\bar{K}$ zu beschreiben gestattet, und ersetzen die d -dimensionale Schnittklasse $J_d(f, g)$, die in dem Produkt $\bar{K} \times \bar{K}$ mit beliebigem Polyeder $\bar{K}$ nicht definierbar ist, durch eine $2n$ -dimensionale Koinzidenzkohomologieklassse $J^{2n}(f, g)$. Im Falle einer Mannigfaltigkeit $\bar{K}$ stellt J^{2n} die duale Kohomologieklassse zu J_d dar, d.h. es ist dann

$$J_d(f, g) = j_{m+n} \cap J^{2n}(f, g),$$

mit j_{m+n} als Klasse des Grundzyklus im Produkt.

$J^{2n}(f, g)$ ist Summe von $d + 1$ Komponenten $J_v^{2n}(f, g)$, $v = n, \dots, m$. Mit Hilfe der Projektionen dieser Komponenten nach $\bar{K}$ und $\bar{K}$ lassen sich auch im allgemeinen Fall sämtliche Koinzidenzhomomorphismen beschreiben.

Ein wesentliches Ziel der vorliegenden Arbeit ist die geometrische Deutung der Invarianten. Die daraus sich ergebenden Folgerungen sind bei Untersuchungen allein mit Hilfe der Homologietheorie im wesentlichen notwendiger Natur. So ist z.B. schon das Verschwinden der algebraischen Koinzidenzpunktzahl $j_0(f, g)$ bei der Abbildung von Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension aufeinander nur notwendig dafür, daß f und g trennbar sind. Die Frage jedoch, wann es in diesem Fall de facto zu f und g homotope Abbildungen f^1

und g^i ohne Koinzidenzen gibt, ist nur mit Hilfe der Homotopietheorie lösbar (siehe (5), (6)).

§ 1. Über die Koinzidenzbildmenge

Wir wollen zunächst einige Tatsachen und Begriffe in einer für das Folgende bequemen Form zusammenstellen. Sei $\mathcal{K}$ ein m -dimensionales endliches Polyeder, $H_0(\mathcal{K}), \dots, H_m(\mathcal{K})$ seine Homologie-, $H^0(\mathcal{K}), \dots, H^m(\mathcal{K})$ seine Kohomologiegruppen über dem rationalen Zahlenkörper. Damit sind sämtliche Gruppen torsionsfrei. Ist $e_r^1, \dots, e_r^{p_r}$ eine Basis von $H_r(\mathcal{K})$ mit der Bettischen Zahl p_r , so bezeichnen wir mit e_r ihren Spaltenvektor. Entsprechend ist e^r der Spaltenvektor einer Basis $e_1^r, \dots, e_{p_r}^r$ von $H^r(\mathcal{K})$. Cup- und Cap-Produkt in $\mathcal{K}$ führen wir ein in der Form:

$$e_i^r \cup e_j^s = \sum_{\lambda} a_{ij}^{\lambda}(r,s) e_{\lambda}^{r+s} \quad \text{Cup-Produkt}$$

$$e_r^i \cap e_j^s = \sum_{\mu} b_{ij}^{\mu}(r,s) e_{r-s}^{\mu} \quad \text{Cap-Produkt}$$

oder in Matrizenschreibweise

$$e^r \cup (e^s)^T = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda}(r,s) e_{\lambda}^{r+s}, \quad \alpha_{\lambda}(r,s) = \left(a_{ij}^{\lambda}(r,s) \right)$$

$$e_r \cap (e^s)^T = \sum_{\mu} \beta_{\mu}(r,s) e_{r-s}^{\mu}, \quad \beta_{\mu}(r,s) = \left(b_{ij}^{\mu}(r,s) \right)$$

Die Basen der Kohomologiegruppen seien so gewählt, daß gilt:

$$1.0 \quad e_r \cap (e^r)^T = e_{p_r}$$

Dabei bezeichne e_{p_r} die p_r -reihige Einheitsmatrix. Aus der Kommutierungsregel für das Cup-Produkt folgt die Symmetrieeigenschaft

$$1.1 \quad \alpha_{\lambda}(r,s) = (-1)^{rs} \alpha_{\lambda}^T(s,r).$$

Aus der Regel

$$(\varphi_r^i \wedge \varphi_j^s) \wedge \varphi_k^t = \varphi_r^i \wedge (\varphi_j^s \vee \varphi_k^t)$$

erhalten wir die Beziehung

$$\sum_{\lambda} b_{ij}^{\lambda}(r,s) b_{\lambda k}^{\times}(r-s,t) = \sum_{\mu} a_{jk}^{\mu}(s,t) b_{i\mu}^{\times}(r,s+t)$$

und damit wegen der speziellen Wahl der Kohomologiebasen:

$$1.2 \quad b_{ij}^{\lambda}(r,s) = a_{j\lambda}^i(s,r-s), \quad a_{jk}^{\mu}(s,t) = b_{\mu j}^k(s+t,s),$$

wobei $t = r-s$ gesetzt wurde. Aus beiden Gleichungen zusammen folgen die Beziehungen

$$1.3 \quad \alpha_i(s,r-s) \mathcal{L}_x(r-s,t) = \sum_{\mu} a_{\mu}^i(s,t) b_{i\mu}^{\times}(r,s+t)$$

$$1.4 \quad \mathcal{L}_x(r,s+t) \mathcal{L}_k(t+s,s) = \sum_{\lambda} \mathcal{L}_{\lambda}(r,s) b_{\lambda k}^{\times}(r-s,t)$$

$$1.5 \quad \alpha_i(s,r-s) \mathcal{L}_x(r-s,t) = (-1)^{st} \mathcal{L}_x(r-t,s) \alpha_i^T(t,r-t),$$

letztere aus 1.3 durch Vertauschen von s und t und 1.1.

Schließlich ergibt sich aus 1.2 als ein gewisser Ersatz für die Symmetrieeigenschaft beim Cup-Produkt:

$$1.6 \quad b_{ij}^{\lambda}(r,s) = (-1)^{s(r-s)} b_{i\lambda}^j(r,r-s).$$

Sei nun $\mathcal{N}$ eine n -dimensionale orientierbare, geschlossene Mannigfaltigkeit, d.h. jeder Punkt von $\mathcal{N}$ besitze eine der n -dimensionalen Vollkugel homöomorphe Umgebung. Die Basisvektoren der r -ten Homologie- und Kohomologiegruppen mit der Bettizahl q_r mögen mit η_r beziehungsweise $\tilde{\eta}^r$ bezeichnet werden, die Matrizen des Cup- und Cap-Produktes mit $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$. Zwei verschiedene Basen η_r und $\tilde{\eta}_r$ der r -ten Homologiegruppe $H_r(\mathcal{N})$ hängen zusammen durch die unimodulare Matrix V_r . Den Übergang von η_r nach $\tilde{\eta}_r$ bezeichnen wir mit η , also:

$$1.7 \quad \eta(\eta_r) = V_r \tilde{\eta}_r.$$

In einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist die r -te Kohomologiegruppe $H^r(\mathcal{N})$ isomorph der $(n-r)$ -ten Homologie-

gruppe, dieser Isomorphismus $\emptyset$ kann nach (2), Seite 156, mit Hilfe des Cap-Produktes ausgedrückt werden. Ist η_n die Klasse des n-dimensionalen Grundzyklus von $\mathcal{N}$, so können wir schreiben:

$$1.8 \quad \emptyset(\eta_i^r) = \eta_n \wedge \eta_i^r = \tilde{\eta}_{n-r}^i$$

Damit sind die Basen $\tilde{\eta}_r$ festgelegt; der Kohomologiering der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ induziert nun einen Homologiering, den sogenannten Alexanderschen Schnitttring, durch die Gleichung

$$1.9 \quad (\eta_n \wedge \eta_i^r) \circ (\eta_n \wedge \eta_j^s) = \eta_n \wedge (\eta_i^r \cup \eta_j^s).$$

Führen wir Schnittmatrizen ein in der Form:

$$\eta_r^i \circ \tilde{\eta}_s^j = \sum_{\mu} t_{ij}^{\mu}(r,s) \eta_{r+s-n}^{\mu}$$

beziehungsweise in Matrizenschreibweise

$$\eta_r \circ \tilde{\eta}_s^T = \sum_{\mu} \mathcal{T}_{\mu}(r,s) \eta_{r+s-n}^{\mu}, \quad \mathcal{T}_{\mu}(r,s) = \left(t_{ij}^{\mu}(r,s) \right),$$

dann ergibt sich aus

$$\eta_r \circ \tilde{\eta}_s^T = V_r \tilde{\eta}_r \circ \tilde{\eta}_s^T = \eta_n \wedge V_r(\eta^{n-r} \cup (\eta^{n-s})^T)$$

die Matrizengleichung

$$1.10 \quad \mathcal{T}_{\mu}(r,s) = \sum_{\lambda} V_r \mathcal{C}_{\lambda}(n-r,n-s) v_{\lambda\mu}^{-1}(r+s-n).$$

Dabei soll der Exponent bei $v_{\lambda\mu}^{-1}$ anzeigen, daß es sich um die Elemente der inversen Matrix V^{-1} handelt. Aus

$$\eta_n \wedge (\eta_i^{n-r} \cup \eta_j^{n-s}) = (\eta_n \wedge \eta_i^{n-r}) \wedge \eta_j^{n-s} \text{ folgt } \tilde{\eta}_r^i \circ \tilde{\eta}_s^j = \tilde{\eta}_r^i \wedge \eta_j^{n-s}$$

und damit

$$1.11 \quad \mathcal{T}_{\mu}(r,s) = \mathcal{D}_{\mu}(r,n-s).$$

Daraus ist ersichtlich, daß die durch 1.8 festgelegte Basis $\tilde{\eta}_r$ der r-ten Homologiegruppe $H_r(\mathcal{N})$ dual zu der Basis η_{n-r} der (n-r)-ten ist, denn für $s = n - r$ folgt aus 1.11

$$\eta_r \circ \tilde{\eta}_{n-r}^T = \mathcal{E}_r.$$

Schließlich haben wir noch:

$$1.12 \quad \mathcal{V}(n-r, r) = V_r^{-1},$$

$$1.13 \quad V_r = (-1)^{r(n-r)} V_{n-r}^T,$$

$$1.14 \quad \mathcal{J}_r(r, s) = (-1)^{(n-r)(n-s)} V_r \mathcal{J}_r^T(s, r) V_s^{-T}.$$

Seien f und g zwei stetige Abbildungen des Polyeders $\bar{K}$ in die Mannigfaltigkeit N . Sie induzieren Homomorphismen der Homologie- und Kohomologiegruppen von $\bar{K}$ und N :

$$f_*, g_*: H_r(\bar{K}) \longrightarrow H_r(N); \quad f^*, g^*: H^r(N) \longrightarrow H^r(\bar{K}).$$

Wegen der speziell gewählten Normierung der Kohomologiebasen schreiben sich diese Homomorphismen:

$$f_*(\mathcal{C}_r^i) = \sum_j f_{1j}(r) y_j^i; \quad f^*(y_j^r) = \sum_i f_{ji}(r) \mathcal{C}_i^r$$

oder in Matrizenform:

$$f_*(\mathcal{C}_r) = F_r y_r; \quad f^*(y^r) = F_r^T \mathcal{C}^r, \quad F_r = (f_{1j}(r)).$$

Entsprechendes gilt natürlich für die Abbildung g . Aus den Beziehungen (siehe (2), S.148 und 155)

$$f^*(y^r \cup (y^s)^T) = f^*(y^r) \cup (f^*(y^s))^T$$

$$f_*(\mathcal{C}_r) \cap (y^s)^T = f_*(\mathcal{C}_r \cap f^*(y^s)^T)$$

folgen die Gleichungen:

$$1.15 \quad \sum_j \mathcal{C}_j(r, s) f_{1j}(r+s) = F_r^T \mathcal{C}_1(r, s) F_s$$

$$1.16 \quad \sum_i \mathcal{L}_1(r, s) F_s f_{1j}(r-s) = F_r \mathcal{D}_j(r, s).$$

Da N Mannigfaltigkeit ist, gibt es weiterhin Homomorphismen der Homologiegruppen von $\bar{K}$ in die Kohomologiegruppen von N :

$$1.17 \quad f_{\#} = \partial^{-1} \gamma f_* : H_r(\bar{K}) \longrightarrow H^{n-r}(N)$$

und es ist

$$1.18 \quad f_{\#}(\mathcal{C}_r) = F_{\#r} y^{n-r}, \quad F_{\#r} = F_r V_r.$$

Schließlich erinnern wir daran, daß sich die Homologie- und Kohomologiegruppen des Produktpolyeders $\bar{X} \times \bar{N}$ wegen der ausschließlichen Verwendung rationaler Koeffizienten darstellen lassen in der Form:

$$H_r(\bar{X} \times \bar{N}) = \sum_v H_v(\bar{X}) \otimes H_{r-v}(\bar{N})$$

$$H^r(\bar{X} \times \bar{N}) = \sum_v H^v(\bar{X}) \otimes H^{r-v}(\bar{N}).$$

Dabei bezeichnet $\otimes$ das Tensorprodukt.

Definition: Ist $\sum_{i,j,v} c_{ij}(\nu) \varphi_v^i \otimes \psi_{r-v}^j$ eine r-dimensionale Homologieklass in $\bar{X} \times \bar{N}$ mit rationalen Koeffizienten $c_{ij}(\nu)$, so bezeichnen wir die Klasse $\sum_{i,j} c_{ij}(\nu) \varphi_v^i \otimes \psi_{r-v}^j$ als ihre Komponente ν -ter Art, die Klassen $\sum_i c_i(r) \varphi_r^i$ und $\sum_j c_j(0) \psi_r^j$ als ihre r-dimensionalen Projektionen nach $\bar{X}$ bzw. $\bar{N}$.

Sei P ein Punkt aus $\bar{X}$, dann ist $h(P) = f(P) \times g(P)$ eine stetige Abbildung des Polyeders $\bar{X}$ in die Produktmannigfaltigkeit $\bar{N} \times \bar{N}$. Den Koinzidenzpunkten von f und g sind eindeutig die Schnittpunkte von $h(\bar{X})$ mit der Diagonalen D in $\bar{N} \times \bar{N}$ zugeordnet. Sei $z_{n+\rho}$ ein $(n+\rho)$ -dimensionaler Zyklus aus $\bar{X}$, $\rho = 0, \dots, d$. Die Bilder der Koinzidenzen auf diesem Zyklus bestimmen den mengentheoretischen Schnitt $h(z_{n+\rho}) \cap D$. Auf diese Weise läßt sich jeder $(n+\rho)$ -dimensionalen Homologieklass von $\bar{X}$ eine ρ -dimensionale Klasse in $\bar{N} \times \bar{N}$ und damit durch Projektion auch in $\bar{N}$ zuordnen. Diese Klasse wollen wir bestimmen.

Sei K eine Simplicialzerlegung von $\bar{X}$, die so fein gewählt sei, daß sie Simplicialapproximationen von f und g gestattet, K' ihre Normalunterteilung. Jeder Eckpunkt von K' erhalte als Index die Dimension seines Trägersimplexes in K. Damit ist eine Eckpunktordnung im Kleinen festgelegt. Ist $x_{\frac{1}{r}}^1$ ein r-dimensionales Simplex von K', so ist durch $x_r^1 = (P_{i_0} \dots P_{i_r})$ mit $i_k < i_{k+1}$ eine eindeutige Orientierung gegeben. Seien x_j^r die Kosimplexe mit dem Kroneckerindex $(x_r^1, x_j^r) = \delta_{ij}$, dann gilt für Rand und Korand:

$$\partial x_r^i = \sum_k \varepsilon_{ik}(r) x_{r-1}^k, \quad \delta x_k^{r-1} = \sum_i \varepsilon_{ik}(r) x_1^r.$$

Das Cap-Produkt ist definiert durch

$$x_r^i \cap x_j^s = ((P_{i_0} \dots P_{i_r}), x_j^s) (P_{i_s} \dots P_{i_r})$$

und für den Rand gilt (siehe (2), Seite 154)

$$\partial(x_r^i \cap x_j^s) = (-1)^s (\partial x_r^i \cap x_j^s - x_r^i \cap \delta x_j^s).$$

Sei $z_{n+p} = \sum_i a_i x_{n+p}^i$ ein Zyklus aus der Basisklasse $\mathcal{C}_{n+p}^\sigma$ von $H_{n+p}(\mathcal{K})$. Um $h(z_{n+p})$ durch eine homologe Zellenkette c_{n+p} im Produkt $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ zu ersetzen, denken wir uns zunächst f und g durch simpliziale Abbildungen $\bar{f}$ und $\bar{g}$ bezüglich K' approximiert. Die Zellen, aus denen c_{n+p} aufzubauen ist, müssen von der Form $\bar{f}(x_r^i) \times \bar{g}(x_{n+p-r}^j)$ sein, $0 \leq r \leq n$. Wir gewinnen nun sicherlich eine zu $h(z_{n+p})$ - allerdings nur bis auf das Vorzeichen - homologe Zellenkette, wenn wir verlangen,

1. daß für jede feste Zelle $\bar{f}(x_r^i) \times \bar{g}(x_{n+p-r}^j)$ die Simplexe x_r^i und x_{n+p-r}^j mit einem Simplex x_{n+p}^k des Zyklus z_{n+p} inzidieren und mit dem gleichen Koeffizienten a_k in die Kette c_{n+p} eingehen,
2. daß die Zellen so orientiert werden, daß der Rand der Kette verschwindet.

Beide Forderungen werden erfüllt durch die Kette

$$1.19 \quad c_{n+p} = \sum_{i,r} (-1)^{r(n+p-r)} \bar{f}(z_{n+p} \cap x_i^{n+p-r}) \times \bar{g}(x_{n+p-r}^i),$$

die erste ergibt sich sofort aus der Definition des Cap-Produktes, die zweite folgt durch leichte Rechnung, denn es ist

$$\begin{aligned} \partial c_{n+p} &= \sum (-1)^{r(n+p-r)} \{ \bar{f}(\partial(z_{n+p} \cap x_i^{n+p-r})) \times \bar{g}(x_{n+p-r}^i) \\ &\quad + (-1)^r \bar{f}(z_{n+p} \cap x_i^{n+p-r}) \times \bar{g}(\delta x_{n+p-r}^i) \} \\ &= \sum (-1)^{r(n+p)} \{ (-1)^{n+p+1} \bar{f}(z_{n+p} \cap \delta x_i^{n+p-r}) \times \bar{g}(x_{n+p-r}^i) \\ &\quad + \bar{f}(z_{n+p} \cap x_i^{n+p-r}) \times \bar{g}(\delta x_{n+p-r}^i) \} \end{aligned}$$

$$= \sum (-1)^{r(n+\varphi)} \left\{ (-1)^{n+\varphi+1} \varepsilon_{k1}(n+\varphi-r+1) f(z_{n+\varphi} \wedge x_k^{n+\varphi-r+1}) \right. \\ \left. \times g(x_{n+\varphi-r}^i) \right. \\ \left. + \varepsilon_{i1}(n+\varphi-r) f(z_{n+\varphi} \wedge x_i^{n+\varphi-r}) \times g(x_{n+\varphi-r-1}^1) \right\}.$$

Nun ist aber offensichtlich der erste Summand für r gleich dem Negativen des zweiten für $r-1$ und daher

$$\partial c_{n+\varphi} = 0.$$

Gehen wir zu neuen Basen $\bar{x}$ der Kettengruppen über:

$$x_r^1 = \sum_j p_{1j}(r) \bar{x}_r^j,$$

so transformieren sich die Basen der Koketten kontragredient:

$$x_1^r = \sum_j p_{j1}^{-1}(r) \bar{x}_j^r$$

und die Kette $c_{n+\varphi}$ schreibt sich im neuen System:

$$\bar{c}_{n+\varphi} = \sum (-1)^{r(n+\varphi-r)} p_{j1}^{-1}(n+\varphi-r) p_{ik}(n+\varphi-r) f(\bar{z}_{n+\varphi} \wedge \bar{x}_j^{n+\varphi-r}) \\ \times g(\bar{x}_{n+\varphi-r}^k) \\ = \sum (-1)^{r(n+\varphi-r)} f(\bar{z}_{n+\varphi} \wedge \bar{x}_j^{n+\varphi-r}) \times g(\bar{x}_{n+\varphi-r}^j).$$

Wählen wir speziell kanonische Kettenbasen a_r^1, b_r^j, c_r^k beziehungsweise a_1^r, b_j^r, c_k^r mit

$$a_r^1 = \partial c_{r+1}^k, \quad \partial b_r^j = 0, \quad \partial c_r^k = a_{r-1}^1,$$

$$\partial a_1^r = c_k^{r+1}, \quad \partial b_j^r = 0, \quad c_k^r = \partial a_1^{r-1},$$

dann erhalten wir:

$$\bar{c}_{n+\varphi} = \sum_r (-1)^{r(n+\varphi-r)} \left\{ \sum_i f(\bar{z}_{n+\varphi} \wedge a_i^{n+\varphi-r}) \times g(a_{n+\varphi-r}^i) \right. \\ + \sum_j f(\bar{z}_{n+\varphi} \wedge b_j^{n+\varphi-r}) \times g(b_{n+\varphi-r}^j) \\ \left. + \sum_k f(\bar{z}_{n+\varphi} \wedge c_k^{n+\varphi-r}) \times g(c_{n+\varphi-r}^k) \right\}.$$

Die erste und dritte Summe ist homolog Null, da $a_{n+\varphi-r}^1$ und $\bar{z}_{n+\varphi} \wedge c_k^{n+\varphi-r}$ Ränder sind. Ist daher $b_{n+\varphi-r}^j$ Vertreter der Basisklasse $b_j^{n+\varphi-r}$ und entsprechend der Kozyklus $b_j^{n+\varphi-r}$

aus der Basiskoklasse $\mathcal{C}_{n+p-r}^j$, dann ergibt sich für die Homologieklassse von $h(z_{n+p})$:

$$1.20 \quad h(\mathcal{C}_{n+p}^\sigma) = \sum_{r,j} (-1)^{r(n+p-r)} f_* (\mathcal{C}_{n+p}^\sigma \wedge \mathcal{C}_j^{n+p-r}) \otimes g_* (\mathcal{C}_{n+p-r}^j).$$

Da der Zyklus $h(z_{n+p})$ nur bis auf das Vorzeichen festgelegt ist, gilt das gleiche auch für seine Klasse.

Die Homologieklassse der Diagonalen D in $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ folgt als Sonderfall, wenn für f und g die identische Abbildung $i: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ genommen wird.

$$\begin{aligned} 1.21 \quad \mathcal{D} &= \sum_{s,j} (-1)^{s(n-s)} y_n \wedge y_j^{n-s} \otimes y_{n-s}^j \\ &= \sum_{s,j} (-1)^{s(n-s)} \tilde{y}_s^j \otimes y_{n-s}^j. \end{aligned}$$

Berechnen wir nun die Schnittklasse:

$$\begin{aligned} h(\mathcal{C}_{n+p}^\sigma) \circ \mathcal{D} &= \sum (-1)^{r(n+p-r)+s(n-s)} \left\{ f_* (\mathcal{C}_{n+p}^\sigma \wedge \mathcal{C}_1^{n+p-r}) \otimes g_* (\mathcal{C}_{n+p-r}^1) \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \tilde{y}_s^j \otimes y_{n-s}^j \right\} \\ &= \sum (-1)^{r(n+p-r)+s(n-r)} a_{ik}^\sigma(n+p-r, r) f_{kl}(r) g_{ip}(n+p-r) \\ &\quad v_{qj}(s) (y_r^1 \cdot \tilde{y}_s^j) \otimes (y_{n+p-r}^p \circ \tilde{y}_{n-s}^q), \end{aligned}$$

letzteres nach der Produktregel für Schnitte und den Gleichungen 1.2 und 1.13. Summiert wird über alle Indizes außer σ . Die Klasse ist p -dimensional. Um ihre ebenfalls p -dimensionale Projektion nach $\mathcal{N}$ zu bestimmen, setzen wir $s = n + p - r$.

Dann ist

$$y_{n+p-r}^p \circ \tilde{y}_{n-s}^q = \sigma_{pq} y_o$$

und wir erhalten als Projektionsklasse in $\mathcal{N}$ mit Hilfe von

1.14:

$$\begin{aligned} 1.22 \quad &\sum (-1)^{n(n+p-r)} a_{ik}^\sigma(n+p-r, r) f_{kl}(r) g_{*ij}(n+p-r) t_{lj}^\epsilon(r, n+p-r) y_\rho^\epsilon \\ &= \sum (-1)^{n(n+p-r)} c_{\pi j}^\lambda(n-r, r-p) g_{*ij}(n+p-r) a_{ik}^\sigma(n+p-r, r) f_{\#kl}(r) \tilde{y}_\rho^\lambda \end{aligned}$$

Die Koeffizienten bilden hier die Spuren vliergliedriger Matrizenprodukte. Führen wir zur Abkürzung die Koinzidenzkoeffizienten v -ter Art

$$1.23 \quad \alpha_{\mu\lambda}^v = (-1)^{v(m-v)} \sum_{\tau} (-1)^{r n_{\text{Sp}}} [\zeta_{\lambda}(n-r, n-v+r) G_{*v-r}^T \alpha_{\mu}^{(v-r, r) \mathbb{F}_{*n}}]$$

für $v = n, \dots, m$ und die Kohomologieklassen

$$1.24 \quad \mathcal{K}_{\sigma}^{n-\rho} = \sum_{\lambda} \alpha_{\sigma\lambda}^{n+\rho} \mathcal{Y}_{\lambda}^{n-\rho}, \quad \sigma = 1, \dots, p_{n+\rho}$$

ein, so ist der Basisklasse $\mathcal{E}_{n+\rho}^{\sigma}$ aus $H_{n+\rho}(\bar{\mathcal{X}})$ nach 1.22 die ρ -dimensionale Homologiekategorie

$$1.25 \quad \mathcal{Y}_{*}^{\lambda}(\mathcal{E}_{n+\rho}^{\sigma}) = (-1)^{(n-\rho)(m-1)} \mathcal{Y}_n^{\lambda} \wedge \mathcal{K}_{\sigma}^{n-\rho}$$

zugeordnet. Das Vorzeichen wurde dabei aus einem später ersichtlichen Grund so gewählt. Damit ist ein Homomorphismus gegeben:

$$\mathcal{Y}_{*}^{\lambda}: H_{n+\rho}(\bar{\mathcal{X}}) \longrightarrow H_{\rho}(\mathcal{X}), \quad \rho = 0, \dots, d,$$

den wir in der Matrizenform

$$1.26 \quad \mathcal{Y}_{*}^{\lambda}(\mathcal{E}_{n+\rho}^T) = (-1)^{(n-\rho)(m-1)} \mathcal{Y}_n^{\lambda} \wedge (\mathcal{K}^{n-\rho})^T$$

schreiben können, wenn $\mathcal{K}^{n-\rho}$ der Spaltenvektor der Koklassen $\mathcal{K}_{\sigma}^{n-\rho}$ ist. Speziell wird für $\rho = 0$ jeder Basisklasse $\mathcal{E}_n^{\sigma}$ die Zahl

$$j_0(\mathcal{E}_n^{\sigma}; f, g) = (-1)^{nd} \alpha_{\sigma}^n = \sum_{\tau} (-1)^r \text{Sp} [v_{n-r}^{-T} G_{*n-r}^T \alpha_{\sigma}^{(n-r, r) \mathbb{F}_{*n}}]$$

zugeordnet, die Hopf in (3) als die algebraische Koinzidenzpunktzahl auf einem n -Zyklus dieser Klasse bezeichnet und von der in der Einleitung die Rede war.

Führen wir mit Hilfe der unimodularen, p_r - beziehungsweise q_r -reihigen Matrizen $\mathcal{P}_r$ und $\mathcal{Q}_r$ neue Basen für die Homologiegruppen in $\bar{\mathcal{X}}$ und $\mathcal{X}$ ein:

$$1.27 \quad \begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_r &= \mathcal{P}_r \mathcal{E}_r, & \mathcal{P}_r &= (p_{ij}(r)) \\ \bar{\mathcal{Y}}_r &= \mathcal{Q}_r \mathcal{Y}_r, & \mathcal{Q}_r &= (q_{kl}(r)) \end{aligned}$$

dann transformieren sich wegen der gewählten Normierung 1.0

die Kohomologiebasen durch die kontragredienten Matrizen:

$$1.28 \quad \bar{e}^r = p_r^{-T} e^r, \quad \bar{y}^r = q_r^{-T} y^r$$

und es ist $\bar{p}_0 = q_0 = q_n = (1)$.

Für die Matrizen des Cup-Produktes und die Abbildungsmatrizen im neuen Basensystem gilt:

$$\bar{a}_\alpha(r,s) = \sum_\mu p_r^{-T} a_\mu(r,s) p_s^{-1} p_{\alpha\mu}(r+s)$$

$$\bar{c}_\alpha(r,s) = \sum_\lambda q_r^{-T} c_\lambda(r,s) q_s^{-1} q_{\alpha\lambda}(r+s)$$

$$\bar{F}_{*r} = p_r F_{*r} q_{n-r}^T.$$

Daraus folgt für die Koinzidenzkoeffizienten:

$$\bar{a}_{\alpha\sigma}^\nu = \sum_{\mu,\lambda} p_{\alpha\mu}(\nu) a_{\mu\lambda}^\nu q_{\sigma\lambda}(2n-\nu)$$

beziehungsweise unter Einführung der Matrix $A_\nu = (a_{\mu\lambda}^\nu)$:

$$1.29 \quad \bar{A}_\nu = p_\nu A_\nu q_{2n-\nu}^T.$$

Satz 1: Die Bilder der Koinzidenzen auf einem Zyklus der Basisklasse $e_{n+\rho}^\sigma$ von $H_{n+\rho}(\bar{X})$ bestimmen in $\mathcal{N}$ die ρ -dimensionale Homologieklass 1.25. Der dadurch gegebene Homomorphismus

$$\mathcal{I}_*': H_{n+\rho}(\bar{X}) \longrightarrow H_\rho(\mathcal{N}), \quad \rho = 0, \dots, d$$

ist invariant gegenüber Basentransformationen in $\bar{X}$ und $\mathcal{N}$ und innerhalb des Homologietypus von f und g .

Beweis: Die Invarianz der Koinzidenzhomomorphismen innerhalb des Homologietypus von f und g ist offensichtlich, die gegenüber Basentransformationen folgt aus

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_*'(\bar{e}_{n+\rho}^T) &= \mathcal{I}_*'(\bar{e}_{n+\rho}^T) p_{n+\rho}^T = (-1)^{(n-\rho)(m-1)} y_n \wedge (y^{n-\rho})^T A_{n-\rho}^T p_{n+\rho}^T \\ &= (-1)^{(n-\rho)(m-1)} \bar{y}_n \wedge (y^{n-\rho})^T q_{n-\rho}^{-1} \bar{A}_{n+\rho}^T \\ &= (-1)^{(n-\rho)(m-1)} \bar{y}_n \wedge (\bar{e}_\sigma^{n-\rho})^T. \end{aligned}$$

Für $\rho = d$ bestimmen die Koinzidenzbilder in $\mathcal{N}$ die d -dimensionalen Homologieklassen $y_n \in H_{\sigma}^{n-d}$. Sind diese nicht alle gleich Null, so bedeutet das nach dem Vorausgegangenen, daß die Koinzidenzbildmenge mindestens die Dimension d hat. Nehmen wir nun an, f' und g' seien zu f und g homotope Abbildungen mit der Eigenschaft, daß ihre Koinzidenzbildmenge in $\mathcal{N}$ die Dimension $d' < d$ besitzt. Sei $z_{n+\rho}$ ein Zyklus aus $\mathcal{K}$ mit $d' < \rho \leq d$. Dann ist die Schnittmenge von $h(z_{n+\rho})$ mit der Diagonalen D in $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ höchstens $d' < \rho$ dimensional. Es folgt

$$\sum_{r,\lambda} \alpha_{\sigma\lambda}^{n+\rho} \tilde{y}_{\rho}^{\lambda} = 0 \quad \text{für } d' < \rho \leq d \text{ und alle } \sigma$$

und damit:

Satz 2: Notwendig dafür, daß sich die Koinzidenzbildmenge in $\mathcal{N}$ durch homotope Änderung von f und g auf eine Menge der Dimension $d' < d$ zusammenziehen läßt, ist das Verschwinden sämtlicher Koinzidenzkoeffizienten $\alpha_{\mu\lambda}^{\nu}$ für $n + d' < \nu \leq m$.

Beispielsweise tritt das ein, wenn eine der Abbildungen, etwa g , das Polyeder $\mathcal{K}$ von vornherein auf eine $d' < d$ dimensionale Menge in $\mathcal{N}$ abbildet. Dann ist $G_{\rho} = 0$ für $\rho > d'$ und daher $\alpha_{\mu\lambda}^{\nu} = 0$ für $n + d' < \nu \leq m$, wie man sich an Hand von 1.23 leicht überzeugt.

Eine weitere Frage ist die nach den Koinzidenzbildern auf dem Polyeder $|z_{n-d+\rho}|$ eines Zyklus $z_{n-d+\rho}$ von $\mathcal{N}$, $\rho = 0, \dots, d$. Sie läßt sich geometrisch lösen durch das Schneiden des Zylinders $|z_{n-d+\rho}| \times \mathcal{N}$ mit der Menge $h(\mathcal{K}) \circ D$ in $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ und anschließende Projektion nach $\mathcal{N}$. Wir bestimmen also die Klasse

$$\begin{aligned} & (y_{n-d+\rho}^{\pi} \circ y_n) \circ h(y_{\nu}^{\mu}) \circ \mathcal{I} \\ &= \sum (-1)^{r(\nu-r)+s(n-r)+(d-\rho)(r+s-\nu)} \\ & \quad a_{ik}^{\mu}(\nu-r, r) f_{kl}(r) g_{ip}(\nu-r) v_{qj}(s) (y_{n-d+\rho}^{\pi} \circ y_r^1 \circ \tilde{y}_s^j) \\ & \quad \otimes (y_{\nu-r}^p \circ \tilde{y}_{n-s}^q) \end{aligned}$$

für $\nu = n, \dots, m$.

Die Dimension dieser Schnittklasse ist $\varrho + v - m$, sie ist folglich höchstens für $m - v \leq \varrho \leq d$ von Null verschieden. Setzen wir wie oben $s = v - r$ und projizieren nach $\mathcal{N}$, so erhalten wir:

$$1.30 \quad \sum (-1)^{n(v-r)} c_{\pi j}^{\lambda(n-r, n+r-v)} g_{*ij}(v-r) a_{ik}^{\mu}(v-r, r) f_{*k\pi}(r) \\ y_{n-d+\varrho}^{\pi} \circ \tilde{y}_{v-n}^{\lambda} \\ = \sum_{\lambda} (-1)^{v(d-v)} \alpha_{\mu\lambda}^v y_{n-d+\varrho}^{\pi} \circ \tilde{y}_{v-n}^{\lambda}.$$

Die hieraus resultierenden Homomorphismen von $H_{n-d+\varrho}^{\pi}(\mathcal{N})$ nach $H_{\varrho+v-m}^{\mu}(\mathcal{N})$ hängen außer von ϱ noch von v, μ ab:

$$y_{\mu*}^{\nu}: H_{n-d+\varrho}^{\pi}(\mathcal{N}) \longrightarrow H_{\varrho+v-m}^{\mu}(\mathcal{N}) \quad \text{für } m - v \leq \varrho \leq d.$$

Wählen wir als Vorzeichen $(-1)^{v(m-v)}$, so werden sie nach 1.30 gegeben durch

$$1.31 \quad y_{\mu*}^{\nu}(y_{n-d+\varrho}^{\pi}) = (-1)^{v(m-v)} y_{n-d+\varrho}^{\pi} \cap \kappa_{\mu}^{2n-v}, \quad \mu = 1, \dots, p_v \\ \varrho = 0, \dots, d.$$

Wir interessieren uns besonders für die Klassen höchster Dimension, die auf diese Weise von den Koinzidenzbildern in $\mathcal{N}$ definiert werden und formulieren als

Satz 3: Die Koinzidenzbilder auf einem Zyklus der Basisklasse

$y_{n-d+\varrho}^{\pi}$ von $H_{n-d+\varrho}^{\pi}(\mathcal{N})$ bestimmen im allgemeinen p_m ϱ -dimensionale Homologieklassen

$$m_{\mu} y_{*}^{\nu}(y_{n-d+\varrho}^{\pi}) = y_{n-d+\varrho}^{\pi} \cap \kappa_{\mu}^{2n-m}, \quad \varrho = 0, \dots, d \\ \mu = 1, \dots, p_m$$

falls nicht alle Koinzidenzkoeffizienten m -ter Art verschwinden. Ist jedoch $\alpha_{\mu\lambda}^v = 0$ für $v_0 < v \leq m$, mindestens einmal aber $\alpha_{\mu\lambda}^{v_0} \neq 0$, so bestimmen sie höchstens $(\varrho + v_0 - m)$ -dimensionale Klassen

$$v_{\mu} y_{*}^{\nu}(y_{n-d+\varrho}^{\pi}) = (-1)^{v_0(m-v_0)} y_{n-d+\varrho}^{\pi} \cap \kappa_{\mu}^{2n-v_0}$$

für $m - v_0 \leq \varrho \leq d, \mu = 1, \dots, p_{v_0}$.

Die Koinzidenzhomomorphismen $y_{\mu*}^{\nu}$ sind Invariante gegenüber Basentransformation in $\mathcal{N}$ und innerhalb der Homotopieklasse (f, g) mit folgender Einschränkung. Ihrer Abhängigkeit von den Basenklassen y_{ν}^{μ}

zufolge transformieren sie sich beim Übergang zu einer neuen Basis 1.27 in $\bar{K}$ wie diese, d.h. es ist

$${}_{\nu\kappa}\bar{\psi}'_{\kappa}(\bar{y}_{n-d+p}) = \sum_{\mu} p_{\mu\kappa}(\nu) {}_{\nu\mu}\psi'_{\kappa}(\bar{y}_{n-d+p})$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } (-1)^{\nu(m-\nu)} {}_{\nu\kappa}\bar{\psi}'_{\kappa}(\bar{y}_{n-d+p}) &= \sum_{\sigma} \bar{\alpha}_{\kappa\sigma}^{\nu} \bar{y}_{n-d+p}^{\sigma} \bar{y}_{\sigma}^{2n-\nu} \\ &= \sum_{\mu, \lambda} p_{\mu\kappa}(\nu) \alpha_{\mu\lambda}^{\nu} \bar{y}_{n-d+p}^{\lambda} \bar{y}_{\lambda}^{2n-\nu} = (-1)^{\nu(m-\nu)} \sum_{\mu} p_{\mu\kappa}(\nu) {}_{\nu\mu}\psi'_{\kappa}(\bar{y}_{n-d+p}) \end{aligned}$$

§ 2. Die Methode der Graphenschnitte

Seien f und g zwei stetige Abbildungen des Polyeders $\bar{K}$ in die Mannigfaltigkeit N . Die Dimension von $\bar{K}$ sei m , die von N n mit $m \geq n$, die Differenz der Dimensionen bezeichnen wir mit d . Das Bild von $\bar{K}$ unter der homöomorphen Abbildung $F(P) = P \times f(P)$ im Produktpolyeder $\bar{K} \times N$ heißt der Graph $F(\bar{K})$. Entsprechend ist der Graph $G(\bar{K})$ der Abbildung g definiert. Die Koinzidenzpunkte von f und g entsprechen genau den mengentheoretischen Schnittpunkten von $F(\bar{K})$ und $G(\bar{K})$.

Sei z_q ein q -dimensionaler Zyklus aus $\bar{K}$. Wir suchen eine Kettendarstellung von $F(z_q)$ in den q -Zellen des Produktes $\bar{K} \times N$. Wie im vorigen Paragraphen seien K und K' eine Simplicialzerlegung von $\bar{K}$ und ihre Normalunterteilung. Ebenso möge die Eckpunktordnung von K' wie dort gegeben sein. Ist f eine Simplicialapproximation von f bezüglich K' und hat z_q die Darstellung $z_q = \sum a_1 x_q^1$ in den q -Simplexen x_q^1 von K' , dann ersetzen wir zunächst das Bild $F(x_q^1)$ des Simplex $x_q^1 = (P_{i_0} \dots P_{i_q})$ durch das schlicht über ihm liegende Simplex

$$\sum_j (x_q^1 \cap x_j^0) \times f(x_j^0) = x_q^1 \times f(P_{i_q})$$

in $\bar{K} \times N$. Multiplizieren wir diese Simplexe mit den Koeffizienten a_1 und summieren über i , so ist die dadurch gewonnene Kette

$$\sum_i (z_q \cap x_j^0) \times f(x_j^0)$$

durch Hinzunahme geeignet orientierter Zellen der Form

$x_{q-r}^k \times f(x_r^j)$ zu einem Zyklus zu ergänzen, wobei wir fordern, daß die Simplexe x_{q-r}^k und x_r^j mit denen des Zyklus z_q inzidieren. Wir behaupten, daß die q - Kette

$$2.0 \quad c_q = \sum_{r,j} (-1)^{r(q-r)} (z_q \cap x_j^r) \times f(x_r^j)$$

diese Forderungen erfüllt, ihr Rand muß folglich verschwinden.

$$\partial c_q = \sum (-1)^{r(q-r)} \left\{ (-1)^{r-1} (z_q \cap \partial x_j^r) \times f(x_r^j) + (-1)^{q-r} (z_q \cap x_j^r) \times \partial f(x_r^j) \right\}$$

wegen $\partial f = f \partial$. Für $r = 0$ ist der zweite Summand gleich Null, für $r = m$ der erste. Daher können wir schreiben, wenn die Summe über r von 0 bis $m - 1$ läuft:

$$\partial c_q = \sum (-1)^{rq-1} \varepsilon_{ij}(r+1) (z_q \cap x_i^{r+1}) \times f(x_r^j) + \sum (-1)^{rq} \varepsilon_{jk}(r+1) (z_q \cap x_j^{r+1}) \times f(x_r^k).$$

Damit sind wir fertig, denn für jedes feste r heben sich die beiden Summen gegeneinander auf. Gehen wir über zu kanonischen Kettenbasen, so ergibt sich wie früher für die Homologieklassse von c_q :

$$\begin{aligned} \epsilon_q &= \sum_{r,j} (-1)^{r(q-r)} (\varphi_q^r \cap \varphi_j^r) \otimes f_*(\varphi_r^j) \\ &= \sum_{r,j} (-1)^{r(q-r)+(m-q)(n-r)} (\varphi_q^r \otimes \varphi_n) \cap (\varphi_j^r \otimes f_*(\varphi_r^j)) \\ &= (-1)^{n(m-q)} (\varphi_q^r \otimes \varphi_n) \cap T_f \end{aligned}$$

unter Einführung der n -dimensionalen Koklasse

$$2.1 \quad T_f = \sum_{r,i} (-1)^{r(m-r)} \varphi_i^r \otimes f_*(\varphi_r^1)$$

Entsprechende Klassen werden durch die Abbildung g gegeben. Eine Schnittklasse zwischen den Graphenklassen für f und g läßt sich in dem Produktpolyeder im allgemeinen nicht erklären. Wir gehen daher etwas anders vor, bestimmen zunächst das Cup-Produkt:

$$\begin{aligned} 2.2 \quad T_f \cup T_g &= \sum (-1)^{(r+g)(m-1)} (\varphi_i^r \otimes f_*(\varphi_r^1)) \cup (\varphi_i^g \otimes g_*(\varphi_r^1)) \\ &= \sum (-1)^{(r+g)(m-1)+r(n-g)} (\varphi_i^r \cup \varphi_i^g) \otimes (f_*(\varphi_r^1) \cup g_*(\varphi_r^1)) \end{aligned}$$

und bezeichnen diese $2n$ - dimensionale Kohomologieklassse in $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ als Koinzidenzkohomologieklassse $J^{2n}(f,g)$. Setzen wir $r + \rho = \nu$, so folgt weiter

$$2.3 \quad J^{2n}(f,g) = (-1)^{\nu(m-\nu)} \sum (-1)^{r(n+\nu+1)} c_{j\lambda}^{\lambda} g_{*i\lambda}^{\lambda}(\nu-r) a_{i\lambda}^{\mu}(r, \nu-r) f_{*ij}(r) \ell_{\mu}^{\nu} \otimes y_{\lambda}^{2n-\nu}$$

Dabei wird summiert über $r, i, j, \lambda, \mu, \lambda$. $J^{2n}(f,g)$ läßt sich darstellen als Summe von $d + 1$ Komponenten ν -ter Art:

$$2.4 \quad J^{2n}(f,g) = \sum_{\nu=0}^m J_{\nu}^{2n}(f,g)$$

und der Vergleich mit Gleichung 1.23 zeigt, daß

$$2.5 \quad J_{\nu}^{2n}(f,g) = \sum_{\mu, \lambda} a_{\mu, \lambda}^{\nu} \ell_{\mu}^{\nu} \otimes y_{\lambda}^{2n-\nu} = (\ell^{\nu})^T A_{\nu} \otimes y^{2n-\nu}.$$

Mit Hilfe von Gleichung 1.29 folgt

$$(\ell^{\nu})^T A_{\nu} \otimes y^{2n-\nu} = (\bar{\ell}^{\nu})^T \bar{A}_{\nu} \bar{q}_{2n-\nu}^T \otimes \bar{y}^{2n-\nu} = (\bar{\ell}^{\nu})^T \bar{A}_{\nu} \otimes \bar{y}^{2n-\nu}$$

und daher gilt:

Satz 4: Die Komponenten ν -ter Art $J_{\nu}^{2n}(f,g)$ und damit die $2n$ -dimensionale Koinzidenzkohomologieklassse $J^{2n}(f,g)$ sind Invarianten innerhalb des Homologietypus von f und g und gegenüber Basentransformationen in $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$.

Weiter haben wir wegen $T_f \circ T_g = (-1)^n T_g \circ T_f$:

Satz 5: $J^{2n}(f,g) = (-1)^n J^{2n}(g,f)$.

Ist f vom gleichen Homologietypus wie g und n ungerade, so folgt $J^{2n}(f,f) = 0$.

Für das Folgende wichtig ist der

Satz 6: Für die Koinzidenzkoeffizienten der Dimension

r und s gilt der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} (-1)^{(r+s)(m-r)} A_r \mathcal{D}_j^T(2n-s, 2n-r) &= \sum_i \mathcal{L}_1(r, s) A_s g_{ij}(r-s) \\ &= \sum_i \mathcal{L}_1(r, s) A_s f_{ij}(r-s). \end{aligned}$$

Beweis: Es genügt, ihn für eine der Abbildungen, etwa g , zu führen, da beim Vertauschen der Rollen von f und g nach Satz 5 beide Seiten der zu zeigenden Gleichung den Faktor $(-1)^n$ aufnehmen. Zu beweisen ist

$$(-1)^{(r+s)(m-r)} \sum_{\lambda} \alpha_{\mu\lambda}^r d_{\pi\lambda}^j(2n-s, 2n-r) = \sum_{i, \sigma} b_{\mu\sigma}^i(r, s) \alpha_{\sigma\pi}^s g_{ij}(r-s).$$

Aus Formel 1.16 folgt:

$$\begin{aligned} \sum_i G_{*s-\rho}^T \mathcal{L}_1^T(r-\rho, s-\rho) \alpha_{\mu}^T(\rho, r-\rho) g_{ij}(r-s) \\ = V_{s-\rho}^T \mathcal{D}_j^T(r-\rho, s-\rho) G_{r-\rho}^T \alpha_{\mu}^T(\rho, r-\rho) \end{aligned}$$

und daraus mit Hilfe von 1.3, 1.11 und 1.14:

$$\begin{aligned} \sum_{i, \sigma} G_{*s-\rho}^T \alpha_{\sigma}^T(\rho, s-\rho) b_{\mu\sigma}^i(r, s) g_{ij}(r-s) \\ = (-1)^{(s-\rho)(r+s)} \mathcal{T}_j(n-s+\rho, r-\rho) G_{*r-\rho}^T \alpha_{\mu}^T(\rho, r-\rho). \end{aligned}$$

Multiplizieren wir von links mit $(-1)^{s(m-s)+\rho(n-s-\rho)}$

$\mathcal{L}_{\pi}(n-\rho, n-s+\rho)$, von rechts mit $E_{*\rho}$, summieren über ρ und gehen schließlich zur Spur der Matrizenprodukte über, dann liefert der Vergleich mit 1.23:

$$\begin{aligned} \sum_{i, \sigma} \alpha_{\sigma\pi}^s b_{\mu\sigma}^i(r, s) g_{ij}(r-s) \\ = \sum_{\rho} (-1)^{\rho n+s(m-r)} \text{Sp} \left[\mathcal{L}_{\pi}(n-\rho, n-s+\rho) \mathcal{T}_j(n-s+\rho, r-\rho) G_{*r-\rho}^T \right. \\ \left. \alpha_{\mu}(r-\rho, \rho) E_{*\rho} \right]. \end{aligned}$$

Ersetzen wir nach 1.11 $\mathcal{T}_j(n-s+\rho, r-\rho)$ durch $\mathcal{D}_j(n-s+\rho, n-r+\rho)$ und wenden Formel 1.3 an, so ergibt sich für die rechte Seite

$$\begin{aligned} \sum_{\rho, \lambda} (-1)^{s(m-r)+\rho n} \text{Sp} \left[\mathcal{L}_{\lambda}(n-\rho, n+\rho-r) G_{*r-\rho}^T \alpha_{\mu}(r-\rho, \rho) E_{*\rho} \right] d_{\pi\lambda}^j(2n-s, 2n-r) \\ = (-1)^{(m-r)(r+s)} \sum_{\lambda} \alpha_{\mu\lambda}^r d_{\pi\lambda}^j(2n-s, 2n-r), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Wir besitzen nun sämtliche Hilfsmittel, um erfolgreich nach den Koinzidenzen auf einem Zyklus $z_{n+\rho}$ der Basisklasse $\mathcal{C}_{n+\rho}^\sigma$ von $\bar{\mathcal{K}}$ zu fragen, $\rho = 0, \dots, d$. Geometrisch geht man so vor, daß man den Zylinder $|z_{n+\rho}| \times \mathcal{N}$ mit dem mengentheoretischen Schnitt der Graphen $F(\bar{\mathcal{K}})$ und $G(\bar{\mathcal{K}})$ schneidet und dann nach $\bar{\mathcal{K}}$ projiziert. Die Bilder erhält man durch entsprechende Projektion nach $\mathcal{N}$. Wir wissen bereits nach Satz 1, daß sie dort die ρ -dimensionale Homologieklassse 1.25 bestimmen. Wir behaupten nun, daß die Projektion der ρ -dimensionalen Homologieklassse

$$2.6 \quad (\mathcal{C}_{n+\rho}^\sigma \otimes y_n) \cap j^{2n}(f, g) = (-1)^{v(d-\rho)} \sum_{\mu, \lambda} \alpha_{\mu\lambda}^v (\mathcal{C}_{n+\rho}^\sigma \wedge \mathcal{C}_\mu^v) \otimes (y_n \wedge y_\lambda^{2n-v})$$

nach $\mathcal{N}$ die Klasse 1.25, nach $\bar{\mathcal{K}}$ eine ρ -dimensionale Klasse liefert, die das Urbild von 1.25 unter f und g darstellt. In diesem Sinne können wir von dieser Klasse sagen, daß sie von den Koinzidenzen auf dem Zyklus $z_{n+\rho}$ von $\mathcal{C}_{n+\rho}^\sigma$ bestimmt wird.

Einen von Null verschiedenen Beitrag ergeben in 2.6 lediglich die Summanden für $n \leq v \leq n+\rho$. Setzen wir $v = n + \rho$, so ergibt die Projektion nach $\mathcal{N}$ in der Tat die Klasse 1.25. Setzen wir dagegen $v = n$ und projizieren nach $\bar{\mathcal{K}}$, so erhalten wir

$$2.7 \quad \varphi_*^2(\mathcal{C}_{n+\rho}^\sigma) = (-1)^{n(d-\rho)} \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^n (\mathcal{C}_{n+\rho}^\sigma \wedge \mathcal{C}_\mu^n), \quad \rho = 0, \dots, d.$$

Dadurch wird also ein Homomorphismus

$$\varphi_*^2: H_{n+\rho}(\bar{\mathcal{K}}) \rightarrow H_\rho(\bar{\mathcal{K}})$$

definiert, den wir schreiben können in der Matrizenform:

$$2.8 \quad \varphi_*^2(\mathcal{C}_{n+\rho}) = (-1)^{n(d-\rho)} \mathcal{C}_{n+\rho} \wedge j^n$$

unter Einführung der gegenüber Basentransformation in $\bar{\mathcal{K}}$ und $\mathcal{N}$ invarianten n -dimensionalen Koklasse

$$2.9 \quad j^n = \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^n \mathcal{C}_\mu^n.$$

Satz 7: Die Koinzidenzen auf einem Zyklus der Basisklasse $\mathcal{C}_{n+p}^\sigma$ von $\mathcal{K}$ bestimmen in $\mathcal{K}$ eine p -dimensionale Homologiekategorie 2.7. Sie sind invariant innerhalb des Homologietypus von f und g und gegenüber Basentransformationen in $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}$. Außerdem bilden sie die Urbilder der Klassen 1.25, d.h. das Schema

$$\begin{array}{ccc} & & H_p(\mathcal{K}) \\ & \nearrow f_* & \downarrow f_*, g_* \\ H_{n+p}(\mathcal{K}) & & H_p(\mathcal{K}) \\ & \searrow g_* & \end{array}$$

ist kommutativ sowohl für f wie für g .

Beweis: Setzen wir in der Gleichung des Satzes 6 für r und s $n+p$ respektive n ein, so folgt

$$\sum_{j,\lambda} (-1)^{j(d-p)} \alpha_{\sigma\lambda}^{n+p} d_\lambda^j(n, n-p) g_f^j = \sum_{i,j,\mu} b_{\sigma\mu}^1(n+p, n) \alpha_\mu^n f_{1j}(p) g_f^j.$$

Daraus ergibt sich weiter die Behauptung:

$$(-1)^{(n-p)(m-1)} \sum_\lambda \alpha_{\sigma\lambda}^{n+p} g_n^\lambda g_\lambda^{n-p} = (-1)^{n(d-p)} f_* \left(\sum_\mu \alpha_\mu^n \mathcal{C}_{n+p}^\sigma \wedge \mathcal{C}_\mu^n \right).$$

Daraus wiederum folgt:

Satz 8: Ist die algebraische Koinzidenzpunktzahl auf allen n -Zyklen des Polyeders $\mathcal{K}$ gleich Null, verschwinden also alle α_μ^n , so verschwinden damit sämtliche Koinzidenzkoeffizienten $\alpha_{\mu\lambda}^{\vee}$, folglich ist die Kohomologiekategorie $J^{2n}(f, g)$ in $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ kohomolog Null.

Dieser Satz ist der Grund dafür, warum es ohne Interesse ist, die von den Koinzidenzen auf $\mathcal{Z}_{n+p}$ aus $\mathcal{C}_{n+p}^\sigma$ bestimmte Koinzidenzklassen kleinerer als p -ter Dimension zu betrachten, denn mit der p -ten verschwinden auch sie. Ebensowenig gibt es über die Koinzidenzmenge eine zu Satz 2 äquivalente Aussage.

Es gilt aber nach Hopf (siehe (3)), daß, falls K ein beliebiger Simplizialkomplex von $\mathcal{K}$ ist, f und g sich homotop

stets so verändern lassen, daß sie koinzidenzpunktfrei über dem $(n-1)$ - dimensionalen Gerüst K^{n-1} von K werden. Notwendig für ihre Trennbarkeit auch über dem n - dimensionalen Gerüst K^n ist das Verschwinden der algebraischen Koinzidenzpunktzahlen α_μ^n . Daher formulieren wir:

Satz 9: Notwendig dafür, daß die Abbildungen f und g über dem n - dimensionalen Gerüst K^n einer Simplicialzerlegung K von $\mathcal{K}$ trennbar sind - insbesondere, daß es zu ihnen überhaupt koinzidenzpunktfreie homotope Abbildungen f' und g' gibt -, ist das Verschwinden der Koinzidenzklasse $J^{2n}(f, g)$.

Vom Standpunkt der Homologietheorie lassen sich in diesem Fall keine weiteren Aussagen machen.

Fragen wir nun nach einer Satz 7 äquivalenten Aussage für die Koinzidenzhomomorphismen $\mathcal{V}_*$, so führen entsprechende Überlegungen wie oben zur Betrachtung der Homologieklassen (vgl. 2.6):

$$\begin{aligned} 2.10 \quad (\mathcal{C}_v^\mu \otimes y_{n-d+p}^\pi) \wedge J^{2n}(f, g) \\ = (-1)^{r(m-v)} \sum_{\sigma, \lambda} \alpha_{\sigma, \lambda}^r (\mathcal{C}_v^\mu \wedge \mathcal{C}_\sigma^{r-\mu}) \otimes (y_{n-d+p}^\pi \wedge y_\lambda^{2n-r}). \end{aligned}$$

Sie hat die Dimension $p+v-m$. Für $v=r$ und Projektion nach $\mathcal{K}$ erhalten wir die Klassen $\nu_\mu \mathcal{V}_*^r(y_{n-d+p}^\pi)$ und für $r=m-p$:

$$2.11 \quad \nu_\mu \mathcal{V}_*^r(y_{n-d+p}^\pi) = (-1)^{(m-p)(m-v)} \mathcal{C}_v^\mu \wedge j_\pi^{m-p} \text{ in } \overline{\mathcal{K}}$$

unter Einführung der $(m-p)$ - dimensionalen Koklassen

$$2.12 \quad j_\pi^{m-p} = \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma, \pi}^{m-p} \mathcal{C}_\sigma^{m-p}.$$

Satz 10: Die Urbilder der auf einem Zyklus der Basisklasse y_{n-d+p}^π von $\mathcal{K}$ liegenden Koinzidenzbilder bestimmen in $\overline{\mathcal{K}}$ für $\mu = 1, \dots, p_v$ die $(p+v-m)$ - dimensionalen Homologieklassen 2.11. Sie sind unabhängig von Basentransformationen in $\mathcal{K}$; führen wir jedoch nach 1.27 neue Basen von $H_v(\overline{\mathcal{K}})$ ein, so transformieren

sie sich wie diese, d.h. es gilt:

$$v_{\mu} \gamma_{*}^2(\bar{y}_{n-d+\rho}^{\pi}) = \sum_{\mu} p_{\mu}(\nu) v_{\mu} \gamma_{*}^2(\bar{y}_{n-d+\rho}^{\pi}).$$

Das Schema

$$\begin{array}{ccc} & v_{\mu} \gamma_{*}^2 & \rightarrow H_{\rho+\nu-m}(\bar{\mathcal{K}}) \\ H_{n-d+\rho}(\mathcal{K}) & & \downarrow f_{*}, g_{*} \\ & v_{\mu} \gamma_{*}^1 & \rightarrow H_{\rho+\nu-m}(\mathcal{K}) \end{array}$$

ist kommutativ für f und g .

Beweis: Die Behauptung

$$\begin{aligned} (-1)^{\nu(m-\nu)} y_{n-d+\rho}^{\pi} \ell_r^{2n-\nu} &= (-1)^{(m-\rho)(m-\nu)} f_{*}(\ell_{\nu}^{\mu} \cap j_{\pi}^{m-\rho}) \\ &= (-1)^{(m-\rho)(m-\nu)} g_{*}(\ell_{\nu}^{\mu} \cap j_{\pi}^{m-\rho}) \end{aligned}$$

folgt sofort aus Satz 6, wenn dort $r = \nu$, $s = m - \rho$ gesetzt wird.

Im folgenden werden wir nur noch die Homomorphismen $v_{\mu} \gamma_{*}^{1,2}$ ($\nu = m$) der Homologiegruppe $H_{n-d+\rho}(\mathcal{K})$ in die Gruppe $H_{\rho}(\mathcal{K})$ respektive $H_{\rho}(\bar{\mathcal{K}})$ betrachten und den Index m generell fortlassen. Über die Bildgruppen der Koinzidenzhomomorphismen formulieren wir den

Satz 11: Für die in den Homologiegruppen $H_{\rho}(\bar{\mathcal{K}})$ und $H_{\rho}(\mathcal{K})$ enthaltenen Bildgruppen der Koinzidenzhomomorphismen gilt:

$$\begin{array}{ccc} \text{Im } \gamma_{*}^2 & \supset & \text{Im } v_{\mu} \gamma_{*}^2 \\ f_{*}, g_{*} \downarrow & & \downarrow f_{*}, g_{*} \\ \text{Im } \gamma_{*}^1 & \supset & \text{Im } v_{\mu} \gamma_{*}^1 \end{array}$$

für alle $\mu = 1, \dots, p_m$.

Beweis: Die Abbildungen f_{*} und g_{*} stellen Epimorphismen der Gruppen $\text{Im } \gamma_{*}^2$ und $\text{Im } v_{\mu} \gamma_{*}^2$ auf die Gruppen $\text{Im } \gamma_{*}^1$ und $\text{Im } v_{\mu} \gamma_{*}^1$ dar. Es genügt daher zu zeigen, daß die Erzeugenden von $\text{Im } v_{\mu} \gamma_{*}^2$ Linearkombinationen der Erzeugenden von $\text{Im } \gamma_{*}^2$ sind. Wegen $d_{\pi}^j(n, n-d+\rho) = v_{\pi j}^{-1}(d-\rho)$ folgt mit Hilfe von Satz 6, wenn dort $r = m - \rho$ und $s = n$ gesetzt wird, und den Formeln 1.4 und 1.6:

$$\begin{aligned}
 \varphi_m^* \cap j_\pi^{m-p} &= \sum \alpha_{1\pi}^{m-p} b_{\mu 1}^x(m, m-p) \varphi_f^x \\
 &= \pm \sum b_{\mu 1}^x(m, m-p) b_{11}^k(m-p, n) \alpha_{1f_*k\pi}^n(d-p) \varphi_f^x \\
 &= \pm \sum b_{\mu 1}^x(m, m-p) b_{1k}^1(m-p, d-p) \alpha_{1f_*k\pi}^n(d-p) \varphi_f^x \\
 &= \pm \sum b_{\mu k}^{\sigma}(m, d-p) b_{\sigma 1}^x(n+p, n) \alpha_{1f_*k\pi}^n(d-p) \varphi_f^x \\
 &= \pm \sum b_{\mu k}^{\sigma}(m, d-p) f_{*k\pi}(d-p) \varphi_{n+p}^{\sigma} \cap j_\pi^n.
 \end{aligned}$$

Das aber war zu zeigen.

Wir schließen diesen Paragraphen, indem wir die zu den Koinzidenzhomomorphismen duale Homomorphismen der Kohomologiegruppen von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{N}$ angeben. Ist φ_π^p eine Basisklasse von $H^p(\mathcal{R})$, η_π^p eine von $H^p(\mathcal{N})$, so bilden wir die Cup-Produkte:

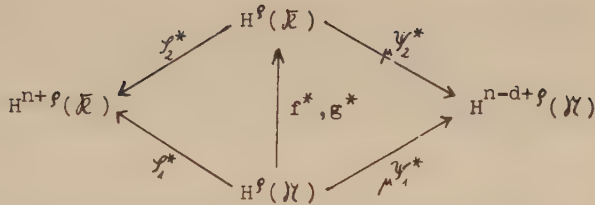
$$\begin{aligned}
 (\varphi_\pi^p \otimes \eta_\pi^0) \cup j_\pi^{2n}(f, g) &= \sum (-1)^{p\nu} \alpha_{\mu\lambda}^\nu(\varphi_\pi^p \cup \eta_\pi^\nu) \otimes \eta_\lambda^{2n-\nu} \\
 (\varphi_\pi^0 \otimes \eta_\pi^p) \cup j_\pi^{2n}(f, g) &= \sum \alpha_{\mu\lambda}^\nu \eta_\mu^\nu \otimes (\eta_\pi^p \cup \eta_\lambda^{2n-\nu})
 \end{aligned}$$

und projizieren die Komponenten für $\nu = n$ und $\nu = m - p$ beziehungsweise $\nu = m$ und $\nu = n + p$ nach $\mathcal{R}$ und $\mathcal{N}$. Das führt zu

Satz 12: In jeder Dimension $p = 0, \dots, d$ induzieren die Abbildungen f und g Homomorphismen der p -ten Kohomologiegruppe von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{N}$, $H^p(\mathcal{R})$ und $H^p(\mathcal{N})$, in die Kohomologiegruppen $H^{n+p}(\mathcal{R})$ und $H^{n-d+p}(\mathcal{N})$. Sie werden gegeben durch

$$\begin{aligned}
 f_1^*(\eta_\pi^p) &= \sum_\lambda c_{\pi\lambda}(p, n-p) j_\lambda^{n+p} \\
 f_2^*(\varphi_\pi^p) &= j_\pi^n \cup \varphi_\pi^p \\
 \mu_1^*(\eta_\pi^p) &= \eta_\pi^p \cup \eta_\mu^{n-d} \\
 \mu_2^*(\varphi_\pi^p) &= \sum_i a_{1\sigma}^i(m-p, p) \eta_1^{n-d+p}
 \end{aligned}$$

und das Schema



ist bis auf das Vorzeichen kommutativ sowohl für f wie für g , d.h. es ist genauer:

$$\begin{aligned} f_1^* &= (-1)^{mp} f_2^* f^* = (-1)^{mp} f_2^* g^*, \\ g_1^* &= (-1)^{mp} g_2^* f^* = (-1)^{mp} g_2^* g^*. \end{aligned}$$

Beweis: Die zu zeigenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} c_{\pi\lambda}(\rho, n-\rho) j_{\lambda}^{n+\rho} &= (-1)^{mp} \sum_{\sigma} f_{\sigma\pi}(\rho) j^{\pi} \cup \mathcal{C}_{\sigma}^{\rho} \\ j_{\pi}^{\rho} \cup \mathcal{C}_{\mu}^{n-d} &= (-1)^{mp} \sum_{i,\sigma} f_{\sigma\pi}(\rho) a_{i\sigma}^{\mu}(m-\rho, \rho) \mathcal{C}_i^{n-d+\rho} \end{aligned}$$

sind äquivalent mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} (-1)^{\rho(d-\rho)} \sum_{\lambda} d_{\lambda}^{\pi}(n, n-\rho) a_{\lambda}^{n+\rho} &= \sum_{\sigma, \mu} a_{\mu}^{n-\rho} b_{\mu}^{\sigma}(n+\rho, n) f_{\sigma\pi}(\rho) \\ \sum_{\lambda} a_{\lambda}^m d_{\lambda}^{\pi}(n-d+\rho, n-d) &= \sum_{i,\sigma} a_{i\sigma}^{m-\rho} b_{\mu}^{\sigma}(m, m-\rho) f_{\sigma\pi}(\rho). \end{aligned}$$

Das aber sind genau die Aussagen des Satzes 6, wenn wir dort einmal $r = n + \rho$, $s = n$, zum andern $r = m$ und $s = m - \rho$ setzen.

§ 3. Spezielle Abbildungen und Polyeder.

Wir werden zunächst einige spezielle Abbildungen f und g untersuchen, sodann den Sonderfall, daß das Urbildpolyeder selbst eine Mannigfaltigkeit ist. Wir beginnen mit

Satz 13: Sei f eine beliebige, g die der konstanten Abbildung homologe Abbildung des m - dimensionalen

Polyeders $\mathcal{K}$ in die n -dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$. c_μ sei der Abbildungsgrad eines n -Zyklus aus der Basisklasse $\mathcal{C}_n^\mu$ von $H_n(\mathcal{K})$ unter $f, \mu = 1, \dots, p_n$. Dann gilt für die algebraischen Koinzidenzpunktzahlen:

$$\alpha_\mu^n = (-1)^{nm} c_\mu.$$

Die übrigen Koinzidenzkoeffizienten verschwinden.

Beweis: g ist vom gleichen Homologietypus wie die konstante Abbildung, daher ist $G_0 = (1)$, während alle übrigen Abbildungsmatrizen von g verschwinden. Damit ist $\alpha_{\mu\lambda}^\nu = 0$ für $\nu > n$ und alle μ und λ . Sei $\nu = n$. Dann bleibt in der Spurensomme für α_μ^n nur der Term mit $r = n$ übrig:

$$\begin{aligned} \alpha_\mu^n &= (-1)^{nm} \text{Sp}[\alpha_\mu(0, n) F_n] = (-1)^{nm} \sum_i a_i^\mu(0, n) f_i(n) \\ &= (-1)^{nm} f_\mu(n) = (-1)^{nm} c_\mu. \end{aligned}$$

Satz 14: Seien f und g vom gleichen Homologietypus, c_μ der Abbildungsgrad eines n -Zyklus aus der Basisklasse $\mathcal{C}_n^\mu$ von $H_n(\mathcal{K})$, $C(\mathcal{N})$ die Eulersche Charakteristik der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$. Dann ist

$$\alpha_\mu^\nu = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } n \\ C(\mathcal{N}) c_\mu & \text{für gerades } n \end{cases}$$

$$\alpha_{\mu\lambda}^\nu = 0 \quad \text{sonst.}$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist $F_r = G_r$ für $r = 0, \dots, n$. Für ungerades n sind wir nach Satz 2 fertig, sei also n gerade. Nach Gleichung 1.15 ist

$$\sum_i v_{\nu-r}^T \mathcal{C}_1(\nu-r, r) v_r f_{\mu 1}(\nu) = F_{\# \nu-r}^T \alpha_\mu(\nu-r, r) F_{\# r}.$$

Die linke Seite und damit alle $\alpha_{\mu\lambda}^\nu$ verschwinden für $\nu > n$. Für $\nu = n$ (n gerade) ergibt sich nach 1.12, 1.13 und 1.23:

$$\begin{aligned} \alpha_\mu^n &= \sum_r \text{Sp}[v_{n-r}^T F_{\# n-r}^T \alpha_\mu(n-r, r) F_{\# r}] \\ &= \sum_r (-1)^r \text{Sp}[\mathcal{C}(n-r, r) v_r] f_\mu(n) = \sum_r (-1)^r \text{Sp} \mathcal{C}_r c_\mu \\ &= c_\mu \sum_r (-1)^r q_r = C(\mathcal{N}) c_\mu. \end{aligned}$$

Satz 15: Die Bildmannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ habe die Bettizahlen der n -Sphäre, c_μ sei der Abbildungsgrad eines n -Zyklus aus $\mathcal{M}$ unter f , c_μ^i der unter g , dann ist

$$\alpha_\mu^n = (-1)^{nd} (c_\mu^i + (-1)^n c_\mu) \quad \mu = 1, \dots, p_n$$

und falls $d \geq n$:

$$\alpha_x^{2n} = (-1)^n \sum_{i,j} c_i^i a_{ij}^x(n,n) c_j \quad x = 1, \dots, p_{2n}.$$

Alle übrigen Koinzidenzkoeffizienten verschwinden.

Beweis: Nach Voraussetzung verschwinden alle Abbildungsmatrizen außer F_0 , F_n und G_0 , G_n . Daher ist

$$\begin{aligned} \alpha_\mu^n &= (-1)^{nd} \left\{ \text{Sp} \left[G_n^T \alpha_\mu(n,0) \right] + (-1)^n \text{Sp} \left[\alpha_\mu(0,n) F_n \right] \right\} \\ &= (-1)^{nd} (c_\mu^i + (-1)^n c_\mu). \end{aligned}$$

Ist $d \geq n$, so gilt ferner

$$\alpha_x^{2n} = (-1)^n \text{Sp} \left[G_n^T \alpha_x(n,n) F_n \right] = (-1)^n \sum_{i,j} c_i^i a_{ij}^x(n,n) c_j.$$

Aus diesem Satz läßt sich eine interessante Folgerung ziehen.

Sei etwa $\mathcal{K}$ ein beliebiges, endliches, m -dimensionales Polyeder, $m \geq n$, p_n seine n -te Bettizahl. Wir geben p_n beliebige ganze Zahlen c_μ vor und fragen danach, ob es eine Abbildung f von $\mathcal{K}$ auf die n -Sphäre S^n gibt mit der Eigenschaft, daß ein n -Zyklus aus der Basisklasse $\mathcal{C}_n^\mu$ von $H_n(\mathcal{K})$ mit dem Abbildungsgrad c_μ auf S^n abgebildet wird. Zu dieser Frage läßt sich ein notwendiges Kriterium angeben.

Satz 16: Sei n gerade, ferner seien p_n ganze Zahlen c_μ vorgegeben, wobei p_n die n -te Bettizahl eines m -dimensionalen Polyeders $\mathcal{K}$ ist. Notwendig dafür, daß es eine Abbildung $f: \mathcal{K} \rightarrow S^n$ gibt derart, daß die n -Zyklen der Basisklasse $\mathcal{C}_n^\mu$ von $H_n(\mathcal{K})$ für $\mu = 1, \dots, p_n$ mit dem Abbildungsgrad c_μ auf S^n abgebildet werden, ist das Bestehen der Gleichung

$$\sum_{i,j} (c_i \mathcal{C}_i^n) \cup (c_j \mathcal{C}_j^n) = 0.$$

Beweis: Sei f eine Abbildung mit den im Satz genannten Eigenschaften. S^n sei als Einheitssphäre im euklidischen R^{n+1} gegeben. Die Spiegelung h am Mittelpunkt von S^n ist eine Selbstabbildung der Sphäre vom Grade -1 , da n gerade ist. Folglich bildet die Abbildung $g = hf$ die n -Zyklen aus $\mathcal{C}_n^h$ mit dem Grade $-c_p$ auf S^n ab. Ist $m < 2n$, so ist die Behauptung a priori richtig. Sei also $m \geq 2n$ oder $d \geq n$. Dann ist nach Satz 15 wegen $\alpha_p^n = 0$ auch $\alpha_x^{2n} = 0$ für alle x , also

$$\sum_{i,j} (c_i \mathcal{C}_i^n) \cup (c_j \mathcal{C}_j^n) = \sum_{i,j,x} c_i a_{ij}^x(n,n) c_j \mathcal{C}_x^{2n} = 0.$$

Setzen wir speziell $\mathcal{K} = S^n \times S^n$, dann ist $\mathcal{C}_n^1 = \eta_n \otimes \eta_0$,

$\mathcal{C}_n^2 = \eta_0 \otimes \eta_n$ Basis von $H_n(S^n \times S^n)$ und $\mathcal{C}_1^n = \eta^n \otimes \eta^0$,

$\mathcal{C}_2^n = (-1)^n \eta^0 \otimes \eta^n$ die nach 1.0 normierte Basis von $H^n(S^n \times S^n)$. Es folgt

$$\alpha(n,n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^n & 0 \end{pmatrix},$$

und daher für die Bedingungsgleichung des Satzes 16 (n gerade): $c_1 c_2 = 0$.

Korollar: Unter den Voraussetzungen des Satzes 16 gibt es höchstens Abbildungen

$$f: S^n \times S^n \longrightarrow S^n$$

mit $c_1 = 0$ oder $c_2 = 0$.

Diese Aussage wurde von Hopf in (7), Seite 436, bereits gezeigt.

Wir setzen nun im folgenden generell voraus, daß das Polyeder $\mathcal{K}$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist. Für $\mathcal{M}$ gelte entsprechend das in der Einleitung für die Bildmannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ Gesagte. Die Alexanderschen Schnittmatrizen seien mit S , die Überführungsmatrizen mit U bezeichnet, die Isomorphismen zwischen Homologie- und Kohomologiegruppen seien gegeben durch

$$2.0 \quad f(\mathcal{C}_r) = U_r \tilde{\mathcal{C}}_r,$$

$$3.1 \quad \Omega(\mathcal{C}_i^r) = \mathcal{C}_m \wedge \mathcal{C}_i^r = \tilde{\mathcal{C}}_{m-r}^i.$$

Der Hopfsche Umkehrhomomorphismus der Homologiegruppen

$$3.2 \quad \tilde{f}_* = \xi^{-1} \Omega f^* \phi^{-1} \eta: H_r(\mathcal{M}) \longrightarrow H_{d+r}(\mathcal{N})$$

wird gegeben durch

$$3.3 \quad \tilde{f}_*(y_r) = \tilde{F}_r \zeta_{d+r} \quad \text{mit} \quad \tilde{F}_r = V_r F_{n-r}^T U_{d+r}^{-1}.$$

Für die Koinzidenzkoeffizienten erhalten wir mit Hilfe von 1.10:

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu\lambda}^{m-v} &= (-1)^{v(m-v)} \sum_r (-1)^{rn} \text{Sp} \left[\zeta_{\lambda}(n-r, r+v-d) G_{m-v-r}^T \alpha_{\mu}^{(m-v-r, r) F_r} \right] \\ &= (-1)^{v(m-v)} \sum_r (-1)^{rn+(m-v-r)(n-1)} \\ &\quad \text{Sp} \left[V_r \zeta_{\lambda}(n-r, r+v-d) V_{r+v-d} G_{m-v-r}^T U_{r+v}^{-1} U_{r+v} \alpha_{\mu}^{(m-v-r, r) F_r} \right] \\ &= (-1)^{d(m-v)} \sum_{r, i, j} (-1)^r \text{Sp} \left[\mathcal{T}_j(r, m-v-r) \tilde{G}_{r+v-d} S_i(r+v, m-r) F_r \right] \\ &\quad u_{i\mu}(v) v_j \lambda(d-v). \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$3.4 \quad \beta_{ij}^v = (-1)^{d(m-v)} \sum_r (-1)^r \text{Sp} \left[\mathcal{T}_j(r, m-r-v) \tilde{G}_{r+v-d} S_i(r+v, m-r) F_r \right]$$

so ist in Matrizenform

$$3.5 \quad A_{m-v} = U_v^T B_v V_{d-v}, \quad B_v = (\beta_{ij}^v)$$

und es folgt für die dem Schnitt der Graphen $F(\mathcal{M})$ und $G(\mathcal{N})$ in $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ zugeordneten d -dimensionalen Koinzidenzklasse:

$$\begin{aligned} 3.6 \quad J_d(f, g) &= ((\mathcal{C}_m \otimes y_n) \wedge T_f) \circ ((\mathcal{C}_m \otimes y_n) \wedge T_g) \\ &= (\mathcal{C}_m \otimes y_n) \wedge J^{2n}(f, g) \\ &= \sum_{\nu, \lambda} \alpha_{\nu\lambda}^{m-v} (\mathcal{C}_m \wedge \mathcal{C}_\nu^{m-v}) \otimes (y_n \wedge y_\lambda^{n-d+v}) \\ &= \sum_{\nu, i, j} \beta_{ij}^v \mathcal{C}_\nu^i \otimes y_{d-v}^j \end{aligned}$$

Das ist genau die von Franz in (4) hergeleitete Homologieklasse, wobei zu beachten ist, daß die Alexanderschen Schnittmatrizen dort etwas anders als hier eingeführt wurden.

Führen wir für die Projektionen von $J_d(f, g)$ nach $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ die Bezeichnungen

$$j_f^\sigma = \sum_i \beta_{i\sigma}^0 \varepsilon_f^i \quad \sigma = 1, \dots, q_{d-f}$$

$$k_f^\pi = \sum_j \beta_{\pi j}^{d-f} y_f^j \quad \pi = 1, \dots, p_{d-f}, \quad f = 0, \dots, d$$

ein, so ergibt sich speziell für $d = f$:

$$j_d = \sum_i \beta_i^d \varepsilon_d^i, \quad k_d = \sum_j \beta_j^0 y_d^j.$$

Das sind die von den Koinzidenzen auf $\mathcal{M}$ und ihren Bildern in $\mathcal{N}$ bestimmten d -dimensionalen Homologieklassen. Ist $m = n$, also $d = 0$, so ist

$$3.7 \quad j_0(f, g) = (-1)^n \sum_r (-1)^r \operatorname{Sp} [\tilde{G}_r F_r]$$

die algebraische Anzahl der Koinzidenzpunkte auf $\mathcal{M}$, siehe (5).

Es ist hier nun offensichtlich bequemer, die Koinzidenzhomomorphismen statt in den gewöhnlichen in den dualen Basen auszusprechen, und zwar gilt:

$$\psi_*^2 \xi^{-1}(\tilde{\varepsilon}_{n+f}^\pi) = j_d \circ \tilde{\varepsilon}_{n+f}^\pi$$

$$\psi_*^1 \xi^{-1}(\tilde{\varepsilon}_{n+f}^\pi) = k_f^\pi$$

$$\psi_*^2 \eta^{-1}(\tilde{y}_{n-d+f}^\sigma) = (-1)^{(m-f)(n-1)} j_f^\sigma$$

$$\psi_*^1 \eta^{-1}(\tilde{y}_{n-d+f}^\sigma) = (-1)^{m(d-f)} k_d \circ \tilde{y}_{n-d+f}^\sigma$$

wie man leicht nachrechnet. Für die Koinzidenzhomomorphismen der Kohomologiegruppen gilt nun

Satz 17: Wegen der Isomorphismen $\cap$ und $\oslash$ zwischen den Homologie- und Kohomologiegruppen der Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ gilt für die in Satz 12 eingeführten Koinzidenzhomomorphismen der Kohomologiegruppen:

$$\mathcal{Y}_2^* = \Omega^{-1} \xi \mathcal{Y}_*^2 \xi^{-1} \Omega \quad , \quad \mathcal{Y}_1^* = \Omega^{-1} \xi \mathcal{Y}_*^2 \eta^{-1} \phi$$

$$\mathcal{Y}_2^* = \phi^{-1} \eta \mathcal{Y}_*^1 \xi^{-1} \Omega \quad , \quad \mathcal{Y}_1^* = \phi^{-1} \eta \mathcal{Y}_*^1 \eta^{-1} \phi$$

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß

$$\mathcal{Y}_2^*(\mathcal{C}_\sigma^f) = \Omega^{-1} \xi \mathcal{Y}_*^2 \xi^{-1} \Omega (\mathcal{C}_\sigma^f).$$

Für die rechte Seite der Behauptung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Omega^{-1} \xi \mathcal{Y}_*^2 \xi^{-1} (\tilde{\mathcal{C}}_{m-\rho}^\sigma) &= \Omega^{-1} \xi (j_d \circ \tilde{\mathcal{C}}_{m-\rho}^\sigma) \\ &= \sum_{i,j,r} \beta_{i1\sigma}^{d,j} (d, m-\rho) u_{j\mu} (d-\rho) \mathcal{C}_\mu^{n+\rho} \\ &= \sum_{i,k,\mu} \beta_{i1\sigma}^{d,u_{ik}} (d) a_{k\sigma}^{r,n,\rho} \mathcal{C}_\mu^{n+\rho} \end{aligned}$$

letzteres nach Formel 1.10. Damit sind wir fertig, denn es ist weiter

$$= \sum_k a_k^n \mathcal{C}_k^n \cup \mathcal{C}_\sigma^f = j^n \cup \mathcal{C}_\sigma^f = \mathcal{Y}_2^*(\mathcal{C}_\sigma^f).$$

Die übrigen Behauptungen ergeben sich entsprechend.

Korollar: $\mathcal{Y}_*^1 = (-1)^{m\rho} \mathcal{Y}_*^1 \tilde{f}_* = (-1)^{m\rho} \mathcal{Y}_*^1 \tilde{g}_*$

$$\mathcal{Y}_*^2 = (-1)^{m\rho} \mathcal{Y}_*^2 \tilde{f}_* = (-1)^{m\rho} \mathcal{Y}_*^2 \tilde{g}_*$$

in jeder Dimension $\rho = 0, \dots, d$.

Beweis: $\mathcal{Y}_*^1 = \eta^{-1} \phi \mathcal{Y}_1^* \phi^{-1} \eta = (-1)^{m\rho} \eta^{-1} \phi \mathcal{Y}_2^* \phi^{-1} \eta$

$$= (-1)^{m\rho} \eta^{-1} \phi \mathcal{Y}_2^* \Omega^{-1} \xi \tilde{f}_* = (-1)^{m\rho} \mathcal{Y}_*^1 \tilde{f}_*$$

nach Satz 12,17 und Gleichung 3.2.

Der Beweis für $\mathcal{Y}_*^2$ und die Abbildung g verläuft analog.

Fassen wir nun die Sätze 4, 6 und 9 zusammen in

Satz 18: Seien f und g zwei stetige Abbildungen der m -dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in die n -dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$, $d = m - n$. Die Koinzidenzen auf dem Polyeder eines Zyklus aus der dualen

Basisklasse $\tilde{e}_{n+p}^\pi$, $\pi = 1, \dots, p_{n+p}$, der $(n+p)$ -ten Homologiegruppe $H_{n+p}(\mathcal{M})$, $p = 0, \dots, d$, sowie ihre Bilder in $\mathcal{N}$ bestimmen p -dimensionale Homologieklassen in $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$, die gegeben werden durch

$$j_d \circ \tilde{e}_{n+p}^\pi \text{ in } \mathcal{M} \text{ und } k_p^\pi \text{ in } \mathcal{N}.$$

Die Bilder von Koinzidenzen auf einem Zyklus einer Klasse von $H_{n-d+p}(\mathcal{N})$, $p = 0, \dots, d$, und ihre Urbilder bestimmen in $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ ebenfalls p -dimensionale Homologieklassen. Ist $\tilde{g}_{n-d+p}^\sigma$, $\sigma = 1, \dots, q_{n-d+p}$, duale Basis von $H_{n-d+p}(\mathcal{N})$, so werden sie gegeben durch

$$(-1)^{(m-p)(d-p)} j_p^\sigma \text{ in } \mathcal{M} \text{ und}$$

$$(-1)^{m(d-p)} k_d \circ \tilde{g}_{n-d+p}^\sigma \text{ in } \mathcal{N}.$$

Die dadurch definierten Koinzidenzhomomorphismen sind invariant innerhalb des Homologietypus von f und g und unabhängig von der Auswahl der Basen in $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$. Ferner ist das Schema

$$\begin{array}{ccccc} & & H_p(\mathcal{M}) & & \\ & \nearrow f_*^2 & \downarrow f_* & \nwarrow g_*^2 & \\ H_{n+p}(\mathcal{M}) & & & & H_{n-d+p}(\mathcal{N}) \\ & \nwarrow (-1)^{m-p} f_*^1 & \downarrow (-1)^{m-p} \tilde{g}_* & \nearrow g_*^1 & \\ & & H_p(\mathcal{N}) & & \end{array}$$

sowohl für f wie für g kommutativ.

Literatur:

- (1) S.Lefschetz: Algebraic Topology.
Am.Math.Soc.Coll.Publ. Vol.27, N.Y.1942
- (2) P.J.Hilton, S.Wylie: Homology Theory.
Cambridge University Press, London 1960
- (3) H.Hopf: Die Koinzidenz - Cozyklen und eine Formel
aus der Fasertheorie.
Princeton Math.Series 12 (Algebr.Geom.
and Top.), New Jersey 1957
- (4) W.Franz: Über die Graphen der Abbildungen einer
Mannigfaltigkeit in eine andere.
Archiv der Math., Vol.X,1, Basel und
Stuttgart 1959
- (5) W.Franz: Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten.
Wiss.Zeitschr.Humboldt-Universität
Berlin, III, 1953/54.
- (6) H.Schirmer: Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten.
Journ.r.u.a.Math.194, 1-4, Berlin 1955
- (7) H.Hopf: Über die Abbildung von Sphären auf Sphären
niedrigerer Dimension
Fund.Math.XXV, 1935

Lebenslauf

Rolf Kottsieper, geboren am 10.5.1935 in Gelsenkirchen als Sohn des Apothekers Walter Kottsieper und seiner Ehefrau Käthe, geb. Eckart. Grundschule von 1941 bis 1943 zunächst in Krefeld, dann bis 1945 in Bad Kreuznach.

Realgymnasium in Kreuznach, ab 1949 in Groß-Umstadt.
Reifeprüfung am 26.2.1955.

Studium der Mathematik und Physik vom Sommersemester 55 bis zum Sommersemester 60 in Frankfurt/Main. 12.11.1957 Vordiplom in Physik, 6.2.1961 Prüfung für das Lehramt an Höheren Schulen.

Vom 1.3.1961 bis 30.9.1962 Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Seminar in Frankfurt, anschließend Studienreferendar in Worms.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Franz für die Anregung und Förderung der vorliegenden Arbeit.

Rolf Kottsieper

